Oraux ; Série N°2

Exercice 1 Soit u_n, v_n deux suites strictement positives telles que $u_n \sim v_n$.

1. On suppose que $u_n \to +\infty$. Montrer que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
2. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse $u_n \to +\infty$.

Exercice 2 On considère les deux équations différentielles suivantes : $(H)\colon \quad 2xy' - 3y = 0$ et $(E)\colon \quad 2xy' - 3y = \sqrt{x}$.

1. Résoudre (H), puis (E) sur $]0,+\infty[$.
2. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0,+\infty[$?

Exercice 3 [CCP MP 2023] Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ et que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$.
2. Montrer que u n'est pas injective, puis que $\operatorname{rang} u = 2$.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 [Mines 2023] Déterminer les couples $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant : $3^m = 8 + n^2$. **Ind** : *Commencer par étudier l'éq. modulo 8.*

Exercice 5 [Centrale 2023] Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$, $a \in E$ un vecteur unitaire, et $H = a^\perp$. On note σ la symétrie orthogonale par rapport à H, et p la projection orthogonale sur H.

1. Montrer que, pour tout sev F de E, $F \oplus^\perp F^\perp = E$.
2. Montrer que, pour $x \in E$, $p(x) = x - \langle a, x\rangle a$.
3. Soit $\Omega = \{x \in E \mid \langle a, x\rangle \geq 0 \text{ et } \langle x, \sigma(x)\rangle \leq 0\}$.

Montrer les équivalences suivantes, pour $x \in E$:

a) $x \in \Omega$ si et seulement si $\langle a, x\rangle \leq \|p(x)\|$,

b) $x \in \Omega$ si et seulement si $\forall y \in \Omega$, $\langle x, y\rangle \leq 0$.

Exercice 6 [ENS 2023] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que si n est impair, alors P_n possède une unique racine réelle, appartenant à $[-n, -1]$.
3. On suppose n pair. Le polynôme P_n a-t-il une racine réelle ?
4. Déterminer les variations et la convexité de $x \mapsto P_n(x)$.

Exercice 7 [X MP 2023] Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables ind. de même loi uniforme sur $[\![1, d]\!]$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Soient Y une variable aléatoire a valeurs dans $\mathbb{Z}$, $r \in [\![0, d-1]\!]$, $\omega = e^{2i\pi/n}$. Montrer que $\mathbf{P}(Y \equiv r\,[d]) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\omega^{kr}} \mathbf{E}\left(\omega^{kY}\right)$.
2. Pour $r \in [\![0, d-1]\!]$, donner une expression de $\mathbf{P}(S_n \equiv r\,[d])$, puis déterminer la limite de $\mathbf{P}(S_n \equiv 0[d])$.

Exercice 8 [ENS 2023] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même rang telles que $A^2B = A$. Montrer que $B^2A = B$.

Oraux ; Série N°2

Exercice 1 Soit u_n, v_n deux suites strictement positives telles que $u_n \sim v_n$.

1. On suppose que $u_n \to +\infty$. Montrer que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
2. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse $u_n \to +\infty$.

Exercice 2 On considère les deux équations différentielles suivantes : $(H)\colon \quad 2xy' - 3y = 0$ et $(E)\colon \quad 2xy' - 3y = \sqrt{x}$.

1. Résoudre (H), puis (E) sur $]0,+\infty[$.
2. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0,+\infty[$?

Exercice 3 [CCP MP 2023] Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ et que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$.
2. Montrer que u n'est pas injective, puis que $\operatorname{rang} u = 2$.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 [Mines 2023] Déterminer les couples $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant : $3^m = 8 + n^2$. **Ind** : *Commencer par étudier l'éq. modulo 8.*

Exercice 5 [Centrale 2023] Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$, $a \in E$ un vecteur unitaire, et $H = a^\perp$. On note σ la symétrie orthogonale par rapport à H, et p la projection orthogonale sur H.

1. Montrer que, pour tout sev F de E, $F \oplus^\perp F^\perp = E$.
2. Montrer que, pour $x \in E$, $p(x) = x - \langle a, x\rangle a$.
3. Soit $\Omega = \{x \in E \mid \langle a, x\rangle \geq 0 \text{ et } \langle x, \sigma(x)\rangle \leq 0\}$.

Montrer les équivalences suivantes, pour $x \in E$:

a) $x \in \Omega$ si et seulement si $\langle a, x\rangle \leq \|p(x)\|$,

b) $x \in \Omega$ si et seulement si $\forall y \in \Omega$, $\langle x, y\rangle \leq 0$.

Exercice 6 [ENS 2023] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que si n est impair, alors P_n possède une unique racine réelle, appartenant à $[-n, -1]$.
3. On suppose n pair. Le polynôme P_n a-t-il une racine réelle ?
4. Déterminer les variations et la convexité de $x \mapsto P_n(x)$.

Exercice 7 [X MP 2023] Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables ind. de même loi uniforme sur $[\![1, d]\!]$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Soient Y une variable aléatoire a valeurs dans $\mathbb{Z}$, $r \in [\![0, d-1]\!]$, $\omega = e^{2i\pi/n}$. Montrer que $\mathbf{P}(Y \equiv r\,[d]) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\omega^{kr}} \mathbf{E}\left(\omega^{kY}\right)$.
2. Pour $r \in [\![0, d-1]\!]$, donner une expression de $\mathbf{P}(S_n \equiv r\,[d])$, puis déterminer la limite de $\mathbf{P}(S_n \equiv 0[d])$.

Exercice 8 [ENS 2023] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même rang telles que $A^2B = A$. Montrer que $B^2A = B$.